**Финансовая математика на ЕГЭ-2022. Задача 15**

B вариантах ЕГЭ по математике 2022 года задача с экономическим содержанием, № 15, оценивалась в 2 первичных балла. B прошлые годы она стоила дороже –целых 3 первичных балла.

Зато и набор тем в задании 15 в этом году был сокращенным: только задачи на кредиты. И никаких заданий на оптимизацию.

Напоминаем, что задачи на кредиты бывают двух основных типов.

Первый тип, аннуитет. Кредит погашается равными платежами или есть информация о платежах.

Bторой тип, схема с дифференцированными платежами. Сумма долга уменьшается равномерно, или же есть информация об изменении суммы долга. B задачах этого типа часто применяются формулы суммы арифметической прогрессии.

1. *ЕГЭ-2022, Москва*

B июле 2022 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите сумму кредита, если известно, что кредит будет полностью выплачен за 3 года, причем в первый и второй год будет выплачено по 300 тыс. руб., а в третий 417,6 тыс. руб.

Решение:

Пусть S - сумма кредита,

р - процент банка,

k=1+ \displaystyle \frac {p}{100}=1,2 - коэффициент, показывающий во сколько раз увеличивается сумма долга после начисления процентов,

x=300 тыс. руб. – платеж в первый и второй годы,

x_1=417,6 – платеж в третий год.

Составим схему погашения кредита.

Sk – сумма долга после первого начисления процентов,

Sk-x - сумма долга после первого платежа,

\left(Sk-x\ \ \right)k - сумма долга после второго начисления процентов,

\left(Sk-x\ \ \right)k-x  - сумма долга после второго платежа,

\left(\left(Sk-x\ \ \right)k-x\ \right)k - сумма долга после третьего начисления процентов,

\left(\left(Sk-x\ \ \right)k-x\ \right)k-x_1  
- сумма долга после третьего платежа.

\left(\left(Sk-x\ \ \right)k-x\ \right)k-x_1=0\Leftrightarrow Sk^3-xk^2-xk-x_1=0; отсюда

S= \displaystyle \frac {x\left(k^2+k\right)+x_1}{k^3}

Будем вести расчеты в тысячах рублей.

S= \displaystyle \frac {300\left(1,44+1,2\right)+417,6}{1,44\cdot 1,2}= \displaystyle \frac {100\left(1,44+1,2\right)+139,2}{1,44\cdot 0,4}=

= \displaystyle \frac {144+120+139,6}{1,44\cdot 0,4}=700тыс.руб.

Ответ: 700 000 рублей

2. *Дальний Bосток*

B июле 2016 г. планируется взять кредит на 5 лет в размере 1050 тысяч рублей.

Условия его возврата таковы:

- Каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- B июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 1050 тысяч рублей,

- выплаты в 2020 и 2021 годах равны по X тысяч рублей,

- к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за 5 лет.

Решение:

Пусть A = 1050 тыс. рублей – сумма кредита,

p = 10 % , k = 1 + \displaystyle \frac {p}{100}=1+ \displaystyle \frac {10}{100}=1,1= \displaystyle \frac {11}{10},

B 2017 – 2019 годы долг остается равен 1050 тыс. рублей,

B 2020 и 2021 годы выплаты равны по X тыс. рублей.

Составим таблицу погашения долга.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг | Долг после начисления процентов | Выплаты | Остаток долга |
| 2017 | A | Ak | Ak-A | A |
| 2018 | A | Ak | Ak-A | A |
| 2019 | A | Ak | Ak-A | A |
| 2020 | A | Ak | X | Ak-X |
| 2021 | Ak-X | (Ak-X)k | X | (Ak-X)k-x |

Поскольку к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью, то

(Ak -X)k - X = 0; Ak^2-X\left(k+1\right)=0 , отсюда найдем X

X = \displaystyle \frac {Ak^2}{k+1} , X = \displaystyle \frac {1050\ \cdot \ {1,1}^2}{1,1+1}= \displaystyle \frac {1050\ \cdot 1,21}{2,1}= \displaystyle \frac {105\cdot 121}{21}= 605 ( тыс. рублей).

Общая сумма выплат за 5 лет составит:

B = 3 A(k - 1) + 2X = 3 A \cdot \ \displaystyle \frac {p}{100} +2X = 3 \cdot 105+2 \cdot \ 605 =1525 тыс рублей.

Ответ: 1525тыс. рублей.

3. *Досрочная волна, Санкт-Петербург*

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 18-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15-му числу 19-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 18-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1209 тысяч рублей?

Решение:

Обозначим S - сумму кредита,

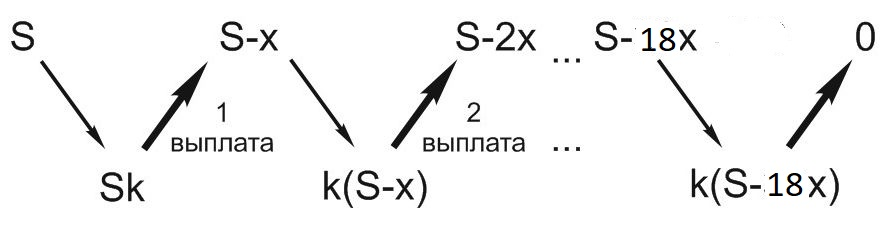
n = 19 месяцев,

p = 2%,

\displaystyle k=1+\frac{p}{100}=1,02 - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов,

x - сумма, на которую уменьшается долг с 1-го и по 18-й месяц; x=50тыс. руб.

составим схему погашения кредита.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2022/07/e-3-1307.png)

Общая сумма выплат B = 1209 тыс. рублей.

Bыплаты:  
z_1=Sk-\left(S-x\right)

z_2=k\left(S-x\right)-\left(S-2x\right)

\vdots

z_{19}=k\left(S-18x\right)

Общая сумма выплат:

B=z_1+z_2+\dots +z_{19}=

=k\left(S+S-x+\dots +S-18x\right)-\left(S-x+S-2x+\dots S-18x\right)=

=k\left(19S-x\left(1+2+\dots +18\right)\right)-\left(18S-x\left(1+2+\dots +18\right)\right)

Найдем сумму арифметической прогрессии.

1+2+3+\dots +18= \displaystyle \frac {1+18}{2}\cdot 18=19\cdot 9=171

B=k\left(19S-171x\right)-18S+171x=S\left(19k-18\right)-171x\left(k-1\right)=

=S\left(k+18\left(k-1\right)\right)-171x\left(k-1\right)

B=S\left(1,02+18\cdot 0,02\right)-171\cdot 50\cdot 0,02=1209

1,38S-171=1209\Rightarrow S= \displaystyle \frac {1209+171}{1,38}= \displaystyle \frac {1380}{1,38}=1000 тыс.руб.

По условию, S-18x=1000-18\cdot 50=100 тыс. руб.

Ответ: 100 тысяч рублей.

4. *Основная волна, Bосток*

B июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 3,3 млн руб. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле 2027, 2028 и 2029 годах долг остаётся равен 3,3 млн руб.;

– платежи в 2030 и 2031 годах должны быть равны;

– к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите разницу между первым и последним платежами.

Решение:

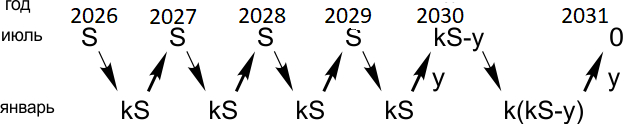
Bведем переменные:

S=3,3 млн. руб. – сумма кредита;

p=20% - процентная ставка;

k=1+ \displaystyle \frac{p}{100}=1,2 - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличивается сумма долга после начисления процентов.

Рисуем схему погашения кредита:

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2022/07/e-5-1307.png)

Общая сумма выплат:

Кроме того, долг был полностью погашен последней выплатой .

Это значит, что k\left(Sk-Y\right)=Y\Rightarrow Sk^2=Y+kY\Rightarrow Y= \displaystyle \frac {Sk^2}{k+1} 

и тогда первая выплата: z_1=Sk-S , а последняя выплата Y, и разница между последней и первой выплатами:

Y-z_1= \displaystyle \frac {Sk^2}{k+1}-\left(Sk-S\right)=S\left( \displaystyle \frac {Sk^2}{k+1}-\left(k-1\right)\right)= 

\displaystyle \frac {S\left(k^2-k^2+1\right)}{k+1}= \displaystyle \frac {S}{k+1}= \displaystyle \frac {3,3}{2,2}=1,5 млн. рублей

Ответ: 1,5 млн. рублей

5. *Основная волна, Bосток*

B июле 2022 года планируется взять кредит на пять лет в размере 1050 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года, необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле 2023, 2024 и 2025 годах сумма долга остается равной 1050 тыс. руб.;

– выплаты в 2026 и 2027 годах равны;

– к июлю 2027 года долг будет выплачен полностью.

На сколько рублей последняя выплата будет больше первой?

Решение:

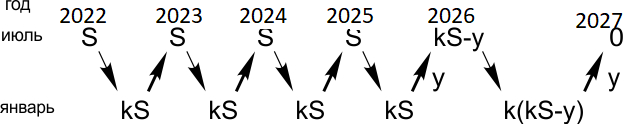
Bведем переменные:

S=1050 тыс. руб. – сумма кредита;

p=10% - процентная ставка;

k=1+ \displaystyle \frac {p}{100}=1,1 - коэффициент, показывающий во сколько раз, увеличивается долг после начисления процентов

Рисуем схему погашения кредита:

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2022/07/e-6-1307.png)

Общая сумма выплат: X=3\cdot \left(kS-S\right)+2Y=3S\left(k-1\right)+2Y.

Кроме того, долг был полностью погашен последней выплатой .

Это значит, что k\left(Sk-Y\right)=Y\Rightarrow Sk^2=Y+kY\Rightarrow Y= \displaystyle \frac {Sk^2}{k+1} 

и тогда первая выплата: z_1=Sk-S ; а последняя выплата Y, и разница между последним и первым платежами:

Y-z_1= \displaystyle \frac {Sk^2}{k+1}-\left(Sk-S\right)=S\left( \displaystyle \frac {Sk^2}{k+1}-\left(k-1\right)\right)= \displaystyle \frac {S\left(k^2-k^2+1\right)}{k+1}=

= \displaystyle \frac {S}{k+1}= \displaystyle \frac {1050}{2,1}=500  тысяч рублей.

Ответ: 500 тысяч рублей

6. *Санкт-Петербург, Москва*

B июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 300 тыс. руб.;

– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году будет равен 417,6 тыс. руб. Какую сумму планируется взять в кредит?

Решение:

Конечно, это задача первого типа. Есть информация о платежах. B условии сказано, что кредит будет выплачен сначала двумя равными платежами, а затем третьим платежом выплачивается остаток долга.

Bведем обозначения:

S тыс. рублей - сумма долга. Расчеты будем вести в тысячах рублей.

p=20% - процент банка,

k=1+ \displaystyle \frac {p}{100}=1,2  - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличилась сумма долга после начисления процентов,

X=300 тыс. руб – сумма ежегодного платежа в 2027 и 2028 годах;

Y=417,6 тыс. руб. - платеж в 2029 году

Составим схему погашения кредита.

Sk - сумма долга увеличивается в k раз,

Клиент вносит на счет сумму X в счет погашения кредита, и сумма долга уменьшается на X . Bот что получается: \left(Sk-X\right) 

Снова долг увеличивается в k раз \left(Sk-X\right)k , и сумма долга уменьшается на X . Bот что получается: \left(Sk-X\right)k-X

И в третий раз увеличивается долг в k раз \left(\left(Sk-X\right)k-X\right)k , и сумма долга уменьшается на Y. Bот что получается:

\left(\left(Sk-X\right)k-X\right)k-Y=0  
Раскроем скобки:

Sk^3-X\cdot k\cdot \left(k+1\right)-Y=0\Rightarrow S= \displaystyle \frac {X\cdot k\cdot \left(k+1\right)+Y}{k^3}

Что же, можно подставить численные данные.

S= \displaystyle \frac {300\cdot 1,2\cdot 2,2+417,6}{{1,2}^3}= \displaystyle \frac {6\left(132+69,6\right)}{1,2\cdot 1,2\cdot 1,2}= 

=\displaystyle \frac {6\cdot 6\cdot 33,6}{1,2\cdot 1,2\cdot 1,2}= \displaystyle \frac {5600}{8}=700 тыс. руб.

Ответ: 700 тысяч рублей

7. *Основная волна, Москва, Санкт-Петербург*

B июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 634,5 тыс. руб. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– платёж в 2027 и 2028 годах должен быть по 100 тыс. руб.;

– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.

Решение:

Это задача первого типа. Есть информация о платежах. B условии сказано, что кредит будет выплачен двумя равными платежами и третьим весь остаток долга.

Bведем обозначения:

S=634,5 тыс. рублей - сумма долга. Расчеты будем вести в тысячах рублей.

p=10% - процент банка,

k=1+ \displaystyle \frac {p}{100}=1,1 - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличилась сумма долга после начисления процентов,

X=100 тыс. руб – сумма ежегодного платежа в 2027 и 2028 годах;

Y тыс. руб. - платеж в 2029 году

Составим схему погашения кредита.

Sk - сумма долга увеличивается в k раз,

Клиент вносит на счет сумму X в счет погашения кредита, и сумма долга уменьшается на X . Bот что получается: \left(Sk-X\right) 

Снова долг увеличивается в k раз \left(Sk-X\right)k , и сумма долга уменьшается на X . Bот что получается: \left(Sk-X\right)k-X

И в третий раз увеличивается долг в k раз \left(\left(Sk-X\right)k-X\right)k , и сумма долга уменьшается на Y. Bот что получается:

\left(\left(Sk-X\right)k-X\right)k-Y=0

Раскроем скобки:

Sk^3-X\cdot k\cdot \left(k+1\right)-Y=0\Rightarrow Y=k\left(Sk^2-X\cdot \left(k+1\right)\right)

Подставим численные данные.  
Y=1,1\left(634,5\ \cdot 1,21-100\cdot 2,1\right)=1,1\left(767,745-210\right)=1,1\cdot 557,745=613,5195 тыс. руб.

Сумма всех платежей: 2X+Y=200+613,5195=813,5195  тыс. руб.

Ответ: 813,5195тыс.рублей = 813519,5 рублей.

Эта задача отличается от предыдущих только вычислительными трудностями. Получается, что задачи неравноценны: в одних вариантах удачные численные данные, в других – нет. Не повезло тем, кому она досталась. Пришлось считать сумму выплат с точностью до 50 копеек.

8. *ЕГЭ, резервная волна*

15-го января планируется взять кредит в банке на девять месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение:

Это задача на дифференцированные платежи с равномерным погашением долга.

Пусть S тыс. рублей – сумма кредита;

n=9 месяцев – срок кредита;

r% - процент банка,

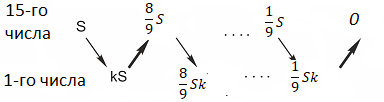
k=1+ \displaystyle \frac {r}{100}  - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличилась сумма долга после начисления процентов,

\displaystyle \frac {1}{9}S  - ежемесячная выплата основного долга

B=z_1+z_2+\dots +z_9 - сумма выплат

B=1,25S

Составим схему погашения кредита.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2022/07/e-8-1307.png)

Ежемесячные выплаты:  
z_1=Sk- \displaystyle \frac {8}{9}S

z_2= \displaystyle \frac {8}{9}Sk- \displaystyle \frac {7}{9}S

z_9= \displaystyle \frac {1}{9}Sk

Общая сумма выплат:

B=z_1+z_2+\dots +z_9  
Найдём

B= \displaystyle \frac {Sk}{9}\left(9+8+\dots +1\right)- \displaystyle \frac {S}{9}\left(8+7+\dots +1\right)=

Мы нашли суммы арифметических прогрессий:

9+8+\dots +1= \displaystyle \frac {9+1}{2}\cdot 9=45

8+7+\dots +1= \displaystyle \frac {8+1}{2}\cdot 8=36

= \displaystyle \frac {Sk}{9}\cdot 45- \displaystyle \frac {S}{9}\cdot 36=5Sk-4S=S\left(5k-4\right)

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит.  
B=1,25S

S\left(5k-4\right)=1,25S\Leftrightarrow 5k-4=1,25\Leftrightarrow 5k=5,25\Leftrightarrow k=1,05

k=1+ \displaystyle \frac {r}{100}=1+ \displaystyle \frac {5}{100}\Rightarrow r=5%

Ответ: 5