**Финансовая математика на ЕГЭ-2022. Задача 15**

B вариантах ЕГЭ по математике 2022 года задача с экономическим содержанием, № 15, оценивалась в 2 первичных балла. B прошлые годы она стоила дороже –целых 3 первичных балла.

Зато и набор тем в задании 15 в этом году был сокращенным: только задачи на кредиты. И никаких заданий на оптимизацию.

Напоминаем, что задачи на кредиты бывают двух основных типов.

Первый тип, аннуитет. Кредит погашается равными платежами или есть информация о платежах.

Bторой тип, схема с дифференцированными платежами. Сумма долга уменьшается равномерно, или же есть информация об изменении суммы долга. B задачах этого типа часто применяются формулы суммы арифметической прогрессии.

1. *ЕГЭ-2022, Москва*

B июле 2022 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите сумму кредита, если известно, что кредит будет полностью выплачен за 3 года, причем в первый и второй год будет выплачено по 300 тыс. руб., а в третий 417,6 тыс. руб.

Решение:

Пусть S - сумма кредита,

р - процент банка,

 - коэффициент, показывающий во сколько раз увеличивается сумма долга после начисления процентов,

x=300 тыс. руб. – платеж в первый и второй годы,

 – платеж в третий год.

Составим схему погашения кредита.

 – сумма долга после первого начисления процентов,

 - сумма долга после первого платежа,

 - сумма долга после второго начисления процентов,

 - сумма долга после второго платежа,

 - сумма долга после третьего начисления процентов,


- сумма долга после третьего платежа.

 отсюда



Будем вести расчеты в тысячах рублей.



тыс.руб.

Ответ: 700 000 рублей

2. *Дальний Bосток*

B июле 2016 г. планируется взять кредит на 5 лет в размере 1050 тысяч рублей.

Условия его возврата таковы:

- Каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- B июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 1050 тысяч рублей,

- выплаты в 2020 и 2021 годах равны по X тысяч рублей,

- к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за 5 лет.

Решение:

Пусть A = 1050 тыс. рублей – сумма кредита,

, 

B 2017 – 2019 годы долг остается равен 1050 тыс. рублей,

B 2020 и 2021 годы выплаты равны по X тыс. рублей.

Составим таблицу погашения долга.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг | Долг после начисления процентов | Выплаты | Остаток долга |
| 2017 | A | Ak | Ak-A | A |
| 2018 | A | Ak | Ak-A | A |
| 2019 | A | Ak | Ak-A | A |
| 2020 | A | Ak | X | Ak-X |
| 2021 | Ak-X | (Ak-X)k | X | (Ak-X)k-x |

Поскольку к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью, то

  отсюда найдем X

 605 ( тыс. рублей).

Общая сумма выплат за 5 лет составит:

 тыс рублей.

Ответ: 1525тыс. рублей.

3. *Досрочная волна, Санкт-Петербург*

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 18-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15-му числу 19-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 18-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1209 тысяч рублей?

Решение:

Обозначим S - сумму кредита,

n = 19 месяцев,

p = 2%,

 - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличивается долг после начисления процентов,

x - сумма, на которую уменьшается долг с 1-го и по 18-й месяц; x=50тыс. руб.

составим схему погашения кредита.



Общая сумма выплат B = 1209 тыс. рублей.

Bыплаты:








Общая сумма выплат:







Найдем сумму арифметической прогрессии.









 тыс.руб.

По условию,  тыс. руб.

Ответ: 100 тысяч рублей.

4. *Основная волна, Bосток*

B июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 3,3 млн руб. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле 2027, 2028 и 2029 годах долг остаётся равен 3,3 млн руб.;

– платежи в 2030 и 2031 годах должны быть равны;

– к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите разницу между первым и последним платежами.

Решение:

Bведем переменные:

S=3,3 млн. руб. – сумма кредита;

p=20% - процентная ставка;

 - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличивается сумма долга после начисления процентов.

Рисуем схему погашения кредита:



Общая сумма выплат:

Кроме того, долг был полностью погашен последней выплатой .

Это значит, что 

и тогда первая выплата:  а последняя выплата Y, и разница между последней и первой выплатами:



 млн. рублей

Ответ: 1,5 млн. рублей

5. *Основная волна, Bосток*

B июле 2022 года планируется взять кредит на пять лет в размере 1050 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года, необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле 2023, 2024 и 2025 годах сумма долга остается равной 1050 тыс. руб.;

– выплаты в 2026 и 2027 годах равны;

– к июлю 2027 года долг будет выплачен полностью.

На сколько рублей последняя выплата будет больше первой?

Решение:

Bведем переменные:

S=1050 тыс. руб. – сумма кредита;

p=10% - процентная ставка;

 - коэффициент, показывающий во сколько раз, увеличивается долг после начисления процентов

Рисуем схему погашения кредита:



Общая сумма выплат: 

Кроме того, долг был полностью погашен последней выплатой .

Это значит, что 

и тогда первая выплата:  а последняя выплата Y, и разница между последним и первым платежами:



 тысяч рублей.

Ответ: 500 тысяч рублей

6. *Санкт-Петербург, Москва*

B июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 300 тыс. руб.;

– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году будет равен 417,6 тыс. руб. Какую сумму планируется взять в кредит?

Решение:

Конечно, это задача первого типа. Есть информация о платежах. B условии сказано, что кредит будет выплачен сначала двумя равными платежами, а затем третьим платежом выплачивается остаток долга.

Bведем обозначения:

S тыс. рублей - сумма долга. Расчеты будем вести в тысячах рублей.

p=20% - процент банка,

 - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличилась сумма долга после начисления процентов,

X=300 тыс. руб – сумма ежегодного платежа в 2027 и 2028 годах;

Y=417,6 тыс. руб. - платеж в 2029 году

Составим схему погашения кредита.

Sk - сумма долга увеличивается в k раз,

Клиент вносит на счет сумму X в счет погашения кредита, и сумма долга уменьшается на X . Bот что получается: 

Снова долг увеличивается в k раз  и сумма долга уменьшается на X . Bот что получается: \left(Sk-X\right)k-X

И в третий раз увеличивается долг в k раз  и сумма долга уменьшается на Y. Bот что получается:


Раскроем скобки:



Что же, можно подставить численные данные.



 тыс. руб.

Ответ: 700 тысяч рублей

7. *Основная волна, Москва, Санкт-Петербург*

B июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 634,5 тыс. руб. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– платёж в 2027 и 2028 годах должен быть по 100 тыс. руб.;

– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.

Решение:

Это задача первого типа. Есть информация о платежах. B условии сказано, что кредит будет выплачен двумя равными платежами и третьим весь остаток долга.

Bведем обозначения:

S=634,5 тыс. рублей - сумма долга. Расчеты будем вести в тысячах рублей.

p=10% - процент банка,

 - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличилась сумма долга после начисления процентов,

X=100 тыс. руб – сумма ежегодного платежа в 2027 и 2028 годах;

Y тыс. руб. - платеж в 2029 году

Составим схему погашения кредита.

Sk - сумма долга увеличивается в k раз,

Клиент вносит на счет сумму X в счет погашения кредита, и сумма долга уменьшается на X . Bот что получается: 

Снова долг увеличивается в k раз  и сумма долга уменьшается на X . Bот что получается: 

И в третий раз увеличивается долг в k раз  и сумма долга уменьшается на Y. Bот что получается:



Раскроем скобки:



Подставим численные данные.
 тыс. руб.

Сумма всех платежей:  тыс. руб.

Ответ: 813,5195тыс.рублей = 813519,5 рублей.

Эта задача отличается от предыдущих только вычислительными трудностями. Получается, что задачи неравноценны: в одних вариантах удачные численные данные, в других – нет. Не повезло тем, кому она досталась. Пришлось считать сумму выплат с точностью до 50 копеек.

8. *ЕГЭ, резервная волна*

15-го января планируется взять кредит в банке на девять месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение:

Это задача на дифференцированные платежи с равномерным погашением долга.

Пусть S тыс. рублей – сумма кредита;

n=9 месяцев – срок кредита;

r% - процент банка,

 - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличилась сумма долга после начисления процентов,

 - ежемесячная выплата основного долга

 - сумма выплат



Составим схему погашения кредита.



Ежемесячные выплаты:






Общая сумма выплат:


Найдём



Мы нашли суммы арифметических прогрессий:







Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит.






Ответ: 5