**Задание 15. Финансовая математика — профильный ЕГЭ по математике**

Задание 15 Профильного ЕГЭ по математике — «экономическая» задача. Как вы уже поняли, речь пойдет о деньгах. О кредитах и вкладах. О ситуациях, где нужно узнать, при каких значениях переменной будет максимальна прибыль или минимальны издержки. С 2022 года задание 15 оценивается на ЕГЭ в 2 первичных балла.

**В этой статье:**

*Как научиться решать «экономические» задачи. С чего начать.*

*Две схемы решения задач на кредиты и как их распознать.*

*Комбинированные задачи.*

*В чем основная сложность «экономической» задачи.*

*Задания на оптимальный выбор. В том числе — с применением производной.*

Если материал покажется вам сложным — вернитесь к теме [«Задачи на проценты»](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/zadachi-ege-na-procenti/) из первой части ЕГЭ по математике.

**Надеемся, что вы уже сейчас сможете ответить на такие вопросы:**

1. *Что принимается за 100%?*
2. *Величина х увеличилась на p%. Как это записать?*
3. *Величина y дважды уменьшилась на р%. Как это записать?*

Ответы на вопросы, а также подготовительные задачи — в статье [«Задача 17 Профильного ЕГЭ по математике. Кредиты и вклады. Начисление процентов»](https://ege-study.ru/zadacha-17-profilnogo-ege-po-matematike-kredity-i-vklady-nachislenie-procentov/). Повторите эту тему.

**Запомним, что есть всего две схемы решения задач на кредиты**

Первая схема: кредит погашается равными платежами. Или известна информация о платежах. Подробно [здесь](https://ege-study.ru/zadacha-17-profilnogo-ege-po-matematike-kredity-sxema-1-izvestna-informaciya-o-platezhax/).

Вторая схема: равномерно уменьшается сумма долга. Или дана информация об изменении суммы долга. Подробно [здесь](https://ege-study.ru/zadacha-17-profilnogo-ege-po-matematike-kredity-sxema-2-izvestna-informaciya-ob-izmenenii-summy-dolga/).

В задачах первого типа обычно применяется [**формула для суммы геометрической прогрессии**](https://ege-study.ru/materialy-ege/geometricheskaya-progressiya-v-zadachax-ege-po-matematike/). В задачах второго типа — [**формула суммы арифметической прогрессии**](https://ege-study.ru/materialy-ege/arifmeticheskaya-progressiya-v-zadachax-ege-po-matematike/)**.**

Посмотрите, чем эти схемы отличаются друг от друга. На какие ключевые слова в условии надо обратить внимание.

Потому что первое, что надо сделать, когда решаете «экономическую» задачу на кредиты или вклады, — определить, к какому типу она относится.

Давайте потренируемся.

*1. 31 декабря 2014 года Аристарх взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Аристарх переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Аристарх выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?*

Конечно, это задача первого типа. Есть информация о платежах. В условии сказано, что Аристарх выплатит долг четырьмя равными платежами.

Введем обозначения:

S=6902 тыс. рублей - сумма долга. Расчеты будем вести в тысячах рублей.

p= 12,5 \% - процент банка,

k=1+\frac{{ p}}{100}=1+\frac{125}{1000}=1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8} - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличилась сумма долга после начисления процентов,

X — сумма ежегодного платежа.

Составим схему погашения кредита. Заметим, что здесь 4 раза (то есть в течение 4 лет) повторяются одни и те же действия:

- сумма долга увеличивается в k раз;

- Аристарх вносит на счет сумму X в счет погашения кредита, и сумма долга уменьшается на X.

Вот что получается:

(\left(\left({ S}\cdot { k}-{ X}\right)\cdot { k}-{ X}\right)\cdot { k}-{ X})\cdot { k}-{ X}=0. 

Раскроем скобки:

S{{ k}}^4-{ X}\left({{ k}}^3+{{ k}}^2+{ k}+1\right)=0.

Что у нас в скобках? Да, это геометрическая прогрессия, и ее проще записать как

1+{{ k}+{{ k}}^2+{ k}}^3. В этой прогрессии первый член равен 1, а каждый следующий в k раз больше предыдущего, то есть знаменатель прогрессии равен k.

Применим формулу суммы геометрической прогрессии:

{{ Sk}}^4={ X}\cdot \frac{{{ k}}^4-1}{{ k}-1}=0. И выразим из этой формулы X.

{ X}=\frac{{ S}\cdot {{ k}}^4\left({ k}-1\right)}{{{ k}}^4-1}. Что же, можно подставить численные данные. Стараемся, чтобы наши вычисления были максимально простыми. Поменьше столбиков! Например, коэффициент k лучше записать не в виде десятичной дроби 1,125 — а в виде обыкновенной дроби \frac{9}{8}, Иначе у вас будет 12 знаков после запятой!

И конечно, не спешить возводить эту дробь в четвертую степень или умножать на S = 6902000 рублей.

{ X}=\frac{{ S}\cdot {{ k}}^4\left({ k}-1\right)}{{{ k}}^4-1}=\frac{{ S}\cdot 9^4\left(\frac{9}{8}-1\right)}{8^4\cdot \left(\frac{9^4}{8^4}-1\right)}=\frac{{ S}\cdot 9^4}{8\cdot \left(9^4-8^4\right)}=\frac{{ S}\cdot 9^4}{8\cdot \left(9^2-8^2\right)\left(9^2+8^2\right)}=\frac{{ S}\cdot 9^4}{8\cdot \left(9+8\right)\left(9^2+8^2\right)}=

=\frac{6902\cdot {81}^2}{8\cdot 17\cdot 145}=\frac{406\cdot {81}^2}{8\cdot 145}=\frac{203\cdot {81}^2}{4\cdot 145}=\frac{29\cdot 7\cdot {81}^2}{4\cdot 29\cdot 5} = 2296,35 тыс.руб.

Ответ: 2296350 рублей.

Вот следующая задача.

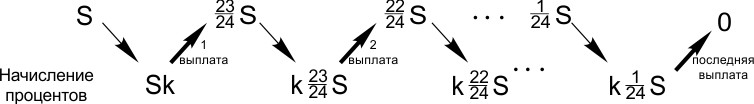
*2. Жанна взяла в банке в кредит 1,8 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 1 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна вернёт банку в течение первого года кредитования?*

В этой задаче сумма долга уменьшается равномерно — задача второго типа.

Пусть S — первоначальная сумма долга, S = 1800 тысяч рублей.

Нарисуем схему начисления процентов и выплат. И заметим некоторые закономерности.

Как обычно, { k}=1+\frac{{ p}}{100}.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/08/%D1%80%D0%B8%D1%819-35.jpg)

Сумма долга уменьшается равномерно. Можно сказать — равными ступеньками. И каждая ступенька равна \frac{1}{24}{ S}. После первой выплаты сумма долга равна \frac{23}{24}{ S}, после второй \frac{22}{24}{ S}.

Тогда первая выплата {{ X}}_1={ kS}-\frac{23}{24}{ S}, вторая выплата{{ X}}_2={ k}\cdot \frac{23}{24}{ S}-\frac{22}{24}{ S},

\dots 

Последняя в году выплата {{ X}}_{12}={ k}\cdot \frac{13}{24}{ S}-\frac{12}{24}{ S}.

Сумма всех выплат в течение первого года:

{ X}={{ X}}_1+{{ X}}_2+\dots +{{ X}}_{12}={ kS}\left(1+\frac{23}{24}+\dots \frac{13}{24}\right)-{ S}\left(\frac{23}{24}+\frac{22}{24}+\dots +\frac{12}{24}\right). 

В первой «скобке» — сумма 12 членов арифметической прогрессии, в которой {{ a}}_1=\frac{13}{24};{{ a}}_{{ n}}=\frac{24}{24}=1.  Обозначим эту сумму {{ S}}_1.

{{ S}}_1=\frac{{{ a}}_1+{{ a}}_{12}}{2}\cdot 12=\frac{13+24}{2\cdot 24}\cdot 12=\frac{37}{4}. 

Во второй скобке — также сумма 12 членов арифметической прогрессии, в которой {{ b}}_1=\frac{12}{24};{{ b}}_{{ n}}=\frac{23}{24}. Эту сумму обозначим {{ S}}_{2.}

{{ S}}_2=\frac{{{ b}}_1+{{ b}}_{12}}{2}\cdot 12=\frac{12+23}{2\cdot 24}\cdot 12=\frac{35}{4}. 

Общая сумма выплат за год:

\small X= S \left({ kS}_1-{{ S}}_2\right)=\frac{1800}{4}\left({ 1,01}\cdot 37-35\right)=  
=\frac{1800\cdot { 2,37}}{4}={ 2,37}\cdot 450= 1066,5 тыс. рублей.

Ответ: 1066500 рублей.

Еще одна задача — комбинированная. Здесь мы рисуем такую же схему выплаты кредита, как в задачах второго типа.

*3. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:*

*− каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;*

*− с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;*

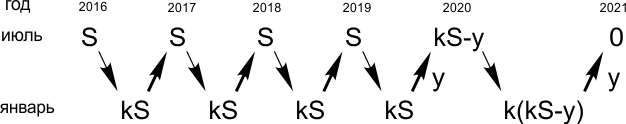
*− в июле 2017, 2018 и 2019 долг остаётся равным S тыс. рублей;*

*− выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 625 тыс. рублей;*

*− к июлю 2021 долг будет выплачен полностью.*

*Найдите общую сумму выплат за пять лет.*

Введем переменные: { k}=1+\frac{25}{100}=\frac{5}{4},Y=625  тысяч рублей. Рисуем схему погашения кредита:

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/08/%D1%80%D0%B8%D1%819-37.jpg)

Общая сумма выплат: { X}=3\cdot \left({ kS}-{ S}\right)+2{ Y}=3{ S}\left({ k}-1\right)+2{ Y.} Кроме того, долг был полностью погашен последней выплатой Y.

Это значит, что { k}\left({ kS}-{ Y}\right)={ Y}, и тогда

{ S}=\frac{\left({ k}+1\right){ Y}}{{{ k}}^2}{ X}=3\cdot \frac{\left({ k}+1\right){ Y}}{{{ k}}^2}\left({ k}-1\right)+2{ Y}=3{ y}\left(\frac{{{ k}}^2-1}{{{ k}}^2}\right)+2{ Y}=  
={ Y}\left(5-\frac{3}{{{ k}}^2}\right)=625\left(5-\frac{3\cdot 16}{25}\right)=\frac{625\cdot 77}{25}=77\cdot 25=1925 тысяч рублей.

Ответ: 1925 тыс. рублей.

Но не только задачи на кредиты и вклады могут встретиться в задании 15 Профильного ЕГЭ по математике. Есть еще задачи на оптимальный выбор. Например, нужно найти максимальную прибыль (при соблюдении каких-либо дополнительных условий), или минимальные затраты. Сначала в такой задаче нужно понять, как одна из величин зависит от другой (или других). Другими словами, нужна та функция, наибольшее или наименьшее значение которой мы ищем. А затем — найти это наибольшее или наименьшее значение. Иногда — с помощью производной. А если повезет и функция получится линейная или квадратичная — можно просто воспользоваться свойствами этих функций.

*4. Консервный завод выпускает фруктовые компоты в двух видах тары—стеклянной и жестяной. Производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции в каждом из видов тары должно быть выпущено не менее 20 центнеров. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена завода за 1 центнер продукции для обоих видов тары.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Вид тары** | **Себестоимость, 1 центнера** | **Отпускная цена, 1 центнера** |
| *стеклянная* | *1500 руб* | *2100 руб* |
| *жестяная* | *1100 руб* | *1750 руб* |

*Предполагая, что вся продукция завода находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль завода за один день (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).*

По условию, завод не может выпускать компот только в стеклянных банках или только в жестяных — должны быть и те, и другие.

Пусть x — доля мощностей завода, занятых под поизводство компотов в стеклянных банках, а y — доля мощностей, занятых под производство компотов в жестяных банках, Тогда x+y=1. (Например, х=0,3 и у = 0,7 — то есть 30% производства — это компот в стеклянных банках, а 70% - компот в жестяных банках).

Если бы завод выпускал только компот в стеклянных банках, их бы получилось 90 центнеров в сутки. Однако выпускаются и те, и другие, и компотов в стеклянных банках производится 90x центнеров, а в жестяных банках - 80y центнеров в сутки.

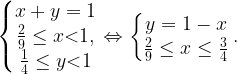
Составим таблицу.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вид тары** | **Доля в общем количестве** | *Производится в сутки* | **Прибыль за 1 центнер** |
| *стеклянная* | *x* | *90x* | *2100 - 1500 = 600 руб* |
| *жестяная* | *y* | *80y* | *1750 - 1100 = 650 руб* |

Общая прибыль завода за сутки равна 600\cdot 90x+650\cdot 80y=54000x+52000y=2000\left(27x+26y\right).

По условию, 90x\ge 20 и 80y\ge 20, то есть x\ge \frac{2}{9} и y\ge \frac{1}{4}.

Нужно найти наибольшее значение выражения 2000\cdot \left(27x+26y\right) при выполнении следующих условий:



Подставим y=1-x в выражение для прибыли завода за сутки. Получим, что она равна 2000 \cdot (27x+26(1-x))=2000(26+x). Это линейная функция от x. Она монотонно возрастает и свое наибольшее значение принимает при x=\frac{3}{4}. Тогда y=\frac{1}{4} и максимально возможная прибыль завода за день равна

2000\cdot \left(27\cdot \frac{3}{4}+26\cdot \frac{1}{4}\right)=2000\cdot \frac{107}{4}=53500 руб.

Ответ: 53500 руб.