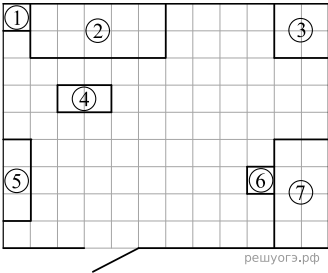


1. Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на плане. Заполните таблицу, в ответ запишите последовательность четырёх цифр без пробелов и других дополнительных символов.

Объекты	Стул	Диван	Журнальный столик	Кресло
Цифры				



Владелец собирается провести ремонт своей квартиры. На плане изображена предполагаемая расстановка мебели в гостиной после ремонта. Сторона каждой клетки равна 0,4 м. Гостиная имеет прямоугольную форму. Единственная дверь гостиной деревянная, в стене напротив двери расположено окно. Справа от двери будет поставлен письменный стол, а к нему приставлен стул, слева от двери у стены будет собран книжный шкаф. В глубине комнаты у стены планируется поставить диван, а перед ним — журнальный столик. Слева от дивана будет стоять торшер. Площадь, занятая диваном, по плану будет равна 1,6 м². В оставшемся свободным углу планируется поставить кресло. Пол гостиной (в том числе там, где будет стоять мебель) планируется покрыть паркетной доской размером 40 см × 10 см. Кроме того, владелец квартиры планирует смонтировать в гостиной электрический подогрев пола. Чтобы сэкономить, владелец не станет подводить обогрев под книжный шкаф, кресло и диван.

Решение. Справа от двери будет поставлен письменный стол, а к нему приставлен стул, значит, стул отмечен цифрой 6. В глубине комнаты у стены планируется поставить диван, а перед ним— журнальный столик, следовательно, диван отмечен цифрой 2, а журнальный столик отмечен цифрой 4. В оставшемся свободным углу планируется поставить кресло, поэтому кресло отмечено цифрой 3.

Ответ: 6243.

2. Паркетная доска продаётся в упаковках по 25 штук. Сколько упаковок с паркетной доской нужно купить, чтобы покрыть пол гостиной?

Решение. Заметим, что чтобы покрыть паркетной доской 0,16м² пола, требуется 4 доски. Найдём площадь гостиной:

$0,4 \cdot 9 \cdot 0,4 \cdot 12 = 17,28 \text{ м}^2.$

Значит, требуется $\frac{17,28}{0,16} \cdot 4 = 432$ доски. Следовательно, требуется $\frac{432}{25} = 17,28$ упаковок с паркетной доской. Таким образом, необходимо купить 18 упаковок (если купить 17 упаковок, то паркета не хватит на всю площадь пола).

Ответ: 18.

3. Найдите площадь той части гостиной, на которой будет смонтирован электрический подогрев пола. Ответ дайте в м².

Решение. Сторона одной клетки равна 0,4 м. Значит, площадь гостиной равна:

$0,4 \cdot 9 \cdot 0,4 \cdot 12 = 17,28 \text{ м}^2.$

Владелец не станет подводить обогрев под книжный шкаф, кресло и диван. Книжный шкаф занимает площадь $0,4 \cdot 1 \cdot 0,4 \cdot 3 = 0,48 \text{ м}^2$. Диван занимает $1,6 \text{ м}^2$. Кресло занимает участок площадью $0,4 \cdot 2 \cdot 0,4 \cdot 2 = 0,64 \text{ м}^2$. Значит, площадь той части гостиной, на которой будет смонтирован электрический подогрев пола, равна

$17,28 - 0,48 - 1,6 - 0,64 = 14,56 \text{ м}^2.$

Ответ: 14,56.

4. Найдите расстояние от дивана до письменного стола (расстояние между двумя ближайшими точками по прямой) в метрах.

Решение. Найдём расстояние между двумя ближайшими точками по прямой дивана и письменного стола по теореме Пифагора:

$\sqrt{(0,4 \cdot 3)^2 + (0,4 \cdot 4)^2} = \sqrt{1,44 + 2,56} = \sqrt{4} = 2 \text{ м}.$

Ответ: 2.

5. Владелец квартиры выбирает торшер из двух моделей А и Б. Цена торшеров и их среднее суточное потребление электроэнергии указаны в таблице. Цена электроэнергии составляет 5 рублей за кВт · ч.

Модель	Цена торшера (руб)	Среднее потребление электроэнергии в сутки, кВт · ч
А	2 100	0,3
Б	1 370	0,4

Обдумав оба варианта, владелец квартиры выбрал модель А. Через сколько лет непрерывной работы экономия от меньшего расхода электроэнергии окупит разницу в цене этих торшеров? Ответ округлите до целого числа.

Решение. Разница в стоимости торшеров равна $2100 - 1370 = 730$ руб. Стоимость электроэнергии за сутки работы первого торшера равна $5 \cdot 0,3 = 1,5$ руб. Стоимость электроэнергии за сутки работы второго торшера равна $5 \cdot 0,4 = 2$ руб. Значит, при установке первого торшера владелец квартиры за сутки экономит $2 - 1,5 = 0,5$ руб. Следовательно, в год владелец квартиры экономит $0,5 \cdot 365 = 182,5$ руб. Таким образом, экономия от меньшего расхода электроэнергии окупит разницу в цене этих торшеров через $\frac{730}{182,5} = 4$ года.

Ответ: 4.

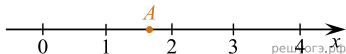
6. Вычислите: $\frac{3}{4} - \frac{4}{5}$.

Решение. Приведём дроби к общему знаменателю:

$\frac{3}{4} - \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5 - 4 \cdot 4}{4 \cdot 5} = -\frac{1}{20} = -0,05.$

Ответ: $-0,05$.

7. Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой А?



В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $\sqrt{2}$
- 2) $\sqrt{3}$
- 3) $\sqrt{7}$
- 4) $\sqrt{11}$

Решение. Возведём в квадрат числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$:

$$\sqrt{2}^2 = 2, \quad \sqrt{3}^2 = 3, \quad \sqrt{7}^2 = 7, \quad \sqrt{11}^2 = 11,$$

Число A^2 лежит между числами $1^2 = 1$ и $2^2 = 4$ и ближе к числу 2^2 . Поэтому точкой А отмечено число $\sqrt{3}$.

Правильный ответ указан под номером 2.

8. Найдите значение выражения $\left(\frac{a+2b}{a^2-2ab} - \frac{1}{a}\right) : \frac{b}{2b-a}$ при $a = 1,6$, $b = \sqrt{2} - 1$.

Решение. Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+2b}{a^2-2ab} - \frac{1}{a}\right) : \frac{b}{2b-a} &= \left(\frac{a+2b}{a(a-2b)} - \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{2b-a}{b} = \\ &= \frac{a+2b-(a-2b)}{a(a-2b)} \cdot \frac{-(a-2b)}{b} = -\frac{4b}{ab} = -\frac{4}{a}. \end{aligned}$$

Подставим значения $a = 1,6$:

$$-\frac{4}{1,6} = -\frac{40}{16} = -2,5.$$

Ответ: $-2,5$.

9. Найдите корни уравнения $x^2 + 4 = 5x$.

Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

По теореме Виета, сумма корней равна 5, а их произведение равно 4. Тем самым, это числа 4 и 1.

Ответ: 14.

10. Записан рост (в сантиметрах) пяти учащихся: 158, 166, 134, 130, 132. На сколько отличается среднее арифметическое этого набора чисел от его медианы?

Решение. Медианой ряда, состоящего из нечетного количества чисел, называется число данного ряда, которое окажется посередине, если этот ряд упорядочить. Медианой ряда, состоящего из четного количества чисел, называется среднее арифметическое двух стоящих посередине чисел этого ряда.

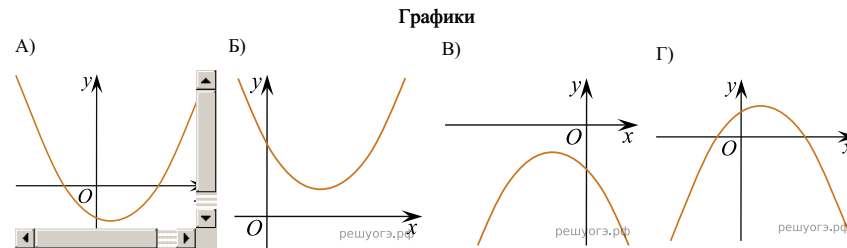
Упорядочим данный ряд: 130, 132, 134, 158, 166, следовательно, медиана равна 134. Среднее арифметическое же будет равно

$$\frac{130 + 132 + 134 + 158 + 166}{5} = 144.$$

Разница между медианой и средним арифметическим составляет $144 - 134 = 10$.

Ответ: 10.

11. На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Для каждого графика укажите соответствующее ему значения коэффициента a и дискриминанта D .



Знаки чисел

- 1) $a > 0, D > 0$
- 2) $a > 0, D < 0$
- 3) $a < 0, D > 0$
- 4) $a < 0, D < 0$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

Решение. График функции $y = ax^2 + bx + c$ — парабола. Ветви этой параболы направлены вверх, если $a > 0$ и вниз, если $a < 0$. При $D > 0$ уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, то есть график функции $y = ax^2 + bx + c$ имеет два пересечения с осью абсцисс. Если $D < 0$, то корней нет, а соответственно график не пересекает ось абсцисс. Таким образом, получаем ответ: А — 1, Б — 2, В — 4, Г — 3.

Ответ: 1243.

12. Период колебания математического маятника T (в секундах) приближенно можно вычислить по формуле $T = 2\sqrt{l/g}$, где l — длина нити (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите длину нити маятника (в метрах), период колебаний которого составляет 3 секунды.

Решение. Подставим в формулу значение T : $2\sqrt{l/g} = 3 \Leftrightarrow 4l = 9 \Leftrightarrow l = 2,25$ м.

Ответ: 2,25.

Примечание.

Период колебаний математического маятника вычисляется по формуле $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, где g — ускорение свободного падения. При приближенных вычислениях можно принять $\sqrt{g} \approx \pi$ и использовать формулу, приведенную в условии задачи.

13. При каких значениях x значение выражения $9x + 7$ меньше значения выражения $8x - 3$?
В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $x > 4$
- 2) $x < 4$
- 3) $x > -10$
- 4) $x < -10$

Решение. Для ответа на вопрос задачи нужно решить неравенство $9x + 7 < 8x - 3$. Решим его:

$$9x + 7 < 8x - 3 \Leftrightarrow x < -10.$$

Правильный ответ указан под номером: 4.

14. Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т.д. Сколько бактерий окажется в организме через 4 часа, если по истечении четвертого часа в организм из окружающей среды попала еще одна бактерия?

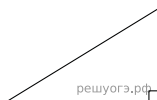
Решение. В четырех часах двенадцать 20-минутных интервалов, следовательно, произойдет 12 циклов деления бактерий. Количество бактерий составляет геометрическую прогрессию с первым членом 1 и знаменателем 2, поэтому через 12 циклов деления количество бактерий составит

$$b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = 1 \cdot 2^{12} = 4096.$$

После того, как в организм попадет еще одна бактерия, их количество составит $4096 + 1 = 4097$.

Ответ: 4097 бактерий.

15. Площадь прямоугольного треугольника равна $722\sqrt{3}$. Один из острых углов равен 30° . Найдите длину катета, лежащего напротив этого угла.



Решение. Пусть длина гипотенузы равна c , а длина катета, лежащего напротив угла 30° равна a . Сумма углов в треугольнике равна 180° , следовательно, второй острый угол равен $180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Площадь треугольника можно найти как половину произведения двух сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{\cos 60^\circ} \sin 60^\circ = \frac{1}{2}a^2 \tan 60^\circ.$$

Откуда получаем:

$$a = \sqrt{\frac{2S}{\tan 60^\circ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 722\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{1444} = 38.$$

Приведем другое решение.

Катет, лежащий напротив угла 30° , равен половине гипотенузы. Пусть a — длина катета, лежащего напротив угла 30° , тогда длина гипотенузы равна $2a$. Найдём второй катет b по теореме Пифагора:

$$b = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

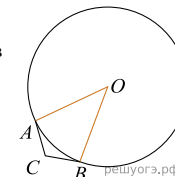
Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, тогда

$$722\sqrt{3} = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{3}, \text{ откуда } a = \sqrt{1444} = 38.$$

Ответ: 38.

16.

В угол C величиной 157° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B , точка O — центр окружности. Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



Решение. Радиус окружности перпендикулярен касательной в точке касания, поэтому углы CAO и OBC равны 90° . Сумма углов четырёхугольника равна 360° , откуда:

$$\angle AOB = 360^\circ - \angle CAO - \angle OBC - \angle ACB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 157^\circ = 23^\circ.$$

Ответ: 23.

17. Периметр равностороннего треугольника равен 30. Найдите его площадь, делённую на $\sqrt{3}$.



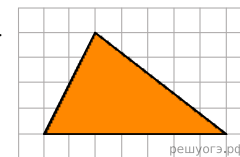
Решение. Так как в равностороннем треугольнике все стороны равны, то сторона данного треугольника равна 10. Угол равностороннего треугольника равен 60° . Площадь треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними, имеем:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ = 25\sqrt{3}.$$

Ответ: 25.

18.

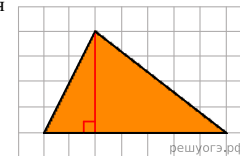
На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Решение. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, проведенную к данному основанию. Таким образом:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 = 14$$

Ответ: 14



19. Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Все углы ромба равны.
- 2) Если стороны одного четырёхугольника соответственно равны сторонам другого четырёхугольника, то такие четырёхугольники равны.
- 3) Через любую точку, лежащую вне окружности, можно провести две касательные к этой окружности.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

Решение. Рассмотрим каждое из утверждений:

- 1) «Все углы ромба равны» — *неверно*. Верно только в случае квадрата.
- 2) «Если стороны одного четырёхугольника соответственно равны сторонам другого четырёхугольника, то такие четырёхугольники равны» — *неверно*. Стороны квадрата и ромба могут быть равны, однако такие четырёхугольники не равны.
- 3) «Через любую точку, лежащую вне окружности, можно провести две касательные к этой окружности» — *верно*.

Ответ: 3.

20. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} (x+y)^2 = 2y, \\ (x+y)^2 = 2x. \end{cases}$$

Решение. Вычтем из первого уравнения второе и получим соотношение: $2y - 2x = 0 \Leftrightarrow y = x$
Подставив полученное выражение в первое уравнение системы, получаем

$$(x+x)^2 = 2x \Leftrightarrow (2x)^2 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 0,5. \end{cases}$$

Таким образом, искомым решением являются точки: (0;0) и (0,5;0,5)

Ответ: (0;0), (0,5;0,5)

21. Моторная лодка прошла 36 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 5 часов. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите скорость лодки в неподвижной воде.

Решение. Обозначим x км/ч искомую скорость, $x > 3$. По течению реки лодка двигалась $\frac{36}{x-3}$ ч., а против течения $\frac{36}{x+3}$ ч.

Составим уравнение:

$$\frac{36}{x-3} + \frac{36}{x+3} = 5.$$

Решим его:

$$\frac{36}{x-3} + \frac{36}{x+3} = 5 \Leftrightarrow \frac{72x}{(x-3)(x+3)} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 72x - 45 = 0, \\ x^2 - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения: 15 и -0,6. Но скорость лодки $x > 3$, следовательно, она равна 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

22. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение. Разложим числитель дроби на множители:

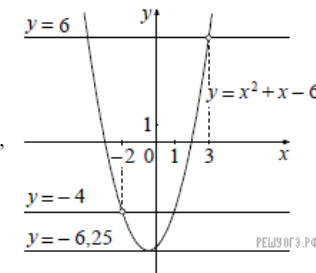
$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

При $x \neq -2$ и $x \neq 3$ функция принимает вид:

$$y = (x-2)(x+3) = x^2 + x - 6.$$

График данной функции — парабола, с выколотыми точками (-2; -4) и (3; 6).

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколота. Вершина параболы имеет координаты (-0,5; -6,25). Поэтому $c = -6,25$, $c = -4$ или $c = 6$.



Ответ: $c = -6,25$, $c = -4$ или $c = 6$.

23. Периметр прямоугольника равен 56, а диагональ равна 27. Найдите площадь этого прямоугольника.

Решение. Пусть одна из сторон прямоугольника равна a . Тогда другая сторона равна $28 - a$, а площадь $a(28 - a)$. По теореме Пифагора:

$$a^2 + (28 - a)^2 = 27^2 \Leftrightarrow a^2 + 2a(28 - a) + (28 - a)^2 = 2a(28 - a) + 27^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (a + (28 - a))^2 = 2a(28 - a) + 27^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 28^2 = 2a(28 - a) + 27^2 \Leftrightarrow a(28 - a) = \frac{28^2 - 27^2}{2} = 27,5.$$

Значит, искомая площадь равна 27,5.

Ответ: 27,5.

Приведем другое решение.

Пусть одна из сторон прямоугольника равна a . Тогда другая сторона равна $28 - a$, а площадь $a(28 - a)$. По теореме Пифагора:

$$a^2 + (28 - a)^2 = 27^2 \Leftrightarrow a^2 + 784 - 56a + a^2 = 729 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2a^2 - 56a + 55 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{56 \pm \sqrt{2696}}{4}.$$

Заметим, что если одна сторона равна $a = \frac{56 + \sqrt{2696}}{4}$, то другая сторона равна $a = 28 - \frac{56 + \sqrt{2696}}{4} = \frac{56 - \sqrt{2696}}{4}$, тогда площадь равна

$$S = \frac{56 + \sqrt{2696}}{4} \cdot \frac{56 - \sqrt{2696}}{4} = \frac{56^2 - 2696}{16} = \frac{440}{16} = 27,5.$$

Заметим, что такое решение связано с трудоемкими вычислениями, поэтому более рациональным является способ, представленный в основном решении.

Приведем еще одно решение.

Пусть одна из сторон прямоугольника равна a , а другая b , тогда площадь равна ab . Получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a+b=28, \\ a^2+b^2=27^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2=28^2 \\ a^2+b^2=27^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2ab+b^2=28^2 \\ a^2+b^2=27^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 27^2+2ab=28^2 \\ a^2+b^2=27^2 \end{cases} \Leftrightarrow ab=\frac{28^2-27^2}{2}=27,5. \end{aligned}$$

Приведем решение Артема Глебова.

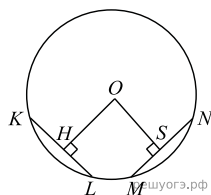
Пусть одна из сторон прямоугольника равна a . Тогда другая сторона равна $28-a$, а площадь $a(28-a)$. По теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} a^2+(28-a)^2 &= 27^2 \Leftrightarrow a^2+784-56a+a^2=729 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2a^2-56a+55=0 \Leftrightarrow a^2-28a+27,5=0. \end{aligned}$$

Корнями этого уравнения являются длины смежных сторон прямоугольника. По теореме Виета произведение корней равно 27,5. Произведение двух смежных сторон— это площадь прямоугольника, следовательно, площадь равна 27,5.

24.

В окружности с центром O проведены две равные хорды KL и MN . На эти хорды опущены перпендикуляры OH и OS . Докажите, что OH и OS равны.



Решение. Проведем OK , ON , OL , OM — радиусы. Треугольники KOL и MON равны по трем сторонам, тогда высоты OH и OS также равны как элементы равных треугольников. Что и требовалось доказать.

25. Длина катета AC прямоугольного треугольника ABC равна 8 см. Окружность с диаметром AC пересекает гипотенузу AB в точке M . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AM:MB=16:9$.

Решение. Пусть $BC=y$ см, $AM=16x$ см и $MB=9x$ см. Поэтому гипотенуза $AB=25x$ см. По теореме Пифагора:

$$y^2=625x^2-64.$$

По теореме о секущей и касательной

$$y^2=25x \cdot 9x=225x^2.$$

Следовательно, $225x^2=625x^2-64$, откуда $x^2=\frac{4}{25}$.

Тогда $y^2=225 \cdot \frac{4}{25}$; $y=\frac{15 \cdot 2}{5}=6$.

Следовательно, площадь треугольника равна

$$\frac{1}{2}AC \cdot BC=\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6=24 \text{ см}^2.$$

Ответ: 24 см^2 .

